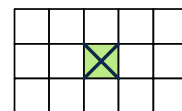
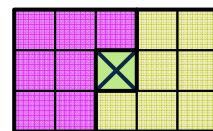
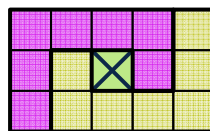
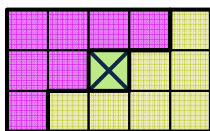
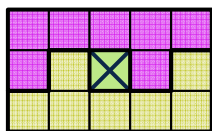
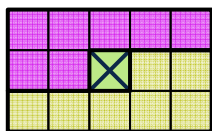




1. Прямокутник 3×5 містить 15 клітин, центральна клітина видалена. Нарисуйте якомога більше способів розрізання прямокутника на дві рівні частини по лініях сітки. (Два способи вважаються різними, якщо фігурки, отримані при першому способі розрізання, не такі, як при другому.)



Відповідь: Існує 5 різних способів розрізання даної фігури (див. рисунок).



2. На день народження Васі мама спекла три смачних торти. Кожен торт складався з певної кількості коржів, між якими знаходився шар полуничного або вишневого крему. Вася зауважив, що всього на приготування пішло 20 коржів, а 10 кремкових шарів були полуничними. Скільки шарів вишневого крему зробила мама? Відповідь поясніть.

Відповідь: 7.

Розв'язання. Оскільки шари крему знаходяться тільки між коржами, то у кожному торті кількість коржів на 1 більша за кількість шарів крему. Тому сумарна кількість коржів у трьох тортах на 3 більша за сумарну кількість шарів крему. На приготування тортів пішло 20 коржів, отже мама зробила $20 - 3 = 17$ шарів крему. З них 10 були полуничними, тому решта $17 - 10 = 7$ — вишневі.

3. Знайдіть найбільше шестицифрове число, у якого кожна цифра, починаючи з третьої, дорівнює сумі двох попередніх цифр. Відповідь поясніть.

Відповідь: 303369.

Розв'язання. Нехай перша цифра шуканого числа дорівнює x , а друга — y . Послідовно виразимо решту цифр числа (див. табл.). Залишилось підібрати таке найбільше можливе значення x , щоб вираз $3x + 5y$ не перевищував 9: це $x = 3$. Тоді $y = 0$. Користуючись таблицею, відновлюємо решту цифр.

1 цифра	2 цифра	3 цифра	4 цифра	5 цифра	6 цифра
x	y	$x + y$	$x + 2y$	$2x + 3y$	$3x + 5y$
3	0	3	3	6	9

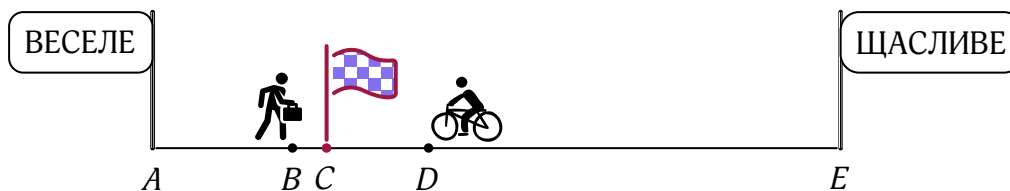
4. Оля і Поля — дуже правдиві дівчата і брешуть тільки в день свого народження. 6 квітня хтось запитав кожну з них: «Коли твій день народження?» Оля сказала: «Він був учора». Поля сказала: «Він буде завтра». Наступного дня їм поставили те саме питання, і виявилось, що вони відповіли те саме. Коли народилася кожна з них? Відповідь поясніть.

Відповідь: Оля — 6 квітня, Поля — 7 квітня.

Розв'язання. Оскільки кожна з дівчат два дні поспіль давала однакову відповідь на питання, то одна з їх відповідей була істинною, а інша — хибною. Якщо Оля 6 квітня сказала правду, то її день народження 5 квітня, але тоді 7 квітня вона мала збрехати, а тому і народитися в цей день. Отримали протиріччя. Тому 6 квітня Оля збрехала, а 7 квітня сказала правду — її день народження 6 квітня. Якщо Поля 6 квітня збрехала, то вона народилася у цей день, але тоді 7 квітня вона мала сказати правду і її день народження 8 квітня. Отримали протиріччя. Тому 6 квітня Поля сказала правду, її день народження 7 квітня і в цей день вона збрехала, що він буде 8 квітня.

5. З Веселого до Щасливого вийшов пішохід. Одночасно назустріч йому зі Щасливого до Веселого виїхав велосипедист. Через годину пішохід опинився рівно посередині між Веселим і велосипедистом, а ще за 15 хвилин вони зустрілися. Скільки часу пішохід ішов до Щасливого? Відповідь поясніть.
Відповідь: 5 годин.

Розв'язання. Для зручності позначимо місто Веселе буквою A , місто Щасливе — буквою E , положення пішохода і велосипедиста через годину руху — буквами B і D відповідно, місце їх зустрічі — буквою C (див. рис.).



За умовою $AB = BD$. На шляху AB пішохід витратив 60 хвилин, отже, на шляху BD він витратив також 60 хвилин. Тоді на шляху CD пішохід витратив $60 - 15 = 45$ хвилин, а велосипедист — 15 хвилин. Тобто швидкість пішохода втричі менша від швидкості велосипедиста. Шлях DE велосипедист подолав за годину, отже, у пішохода на цей шлях потрібно 3 години. На шляху AD він витратив 2 години, отже на всю дорогу йому знадобилося $2 + 3 = 5$ годин.

6. У синьому, червоному і жовтому горщиках на підвіконні в ряд ростуть червона герань, синя незабудка і жовта лілія. Відомо, що жодна квітка не росте в горщику того самого кольору. Лілія росте правіше за всіх, а в центрі немає нічого червоного. Визначте, в якому порядку ростуть квіти і якого кольору в них горщики. Відповідь поясніть.

Відповідь: зліва направо — червона герань у синьому горщику, синя незабудка у жовтому горщику, жовта лілія у червоному горщику.

Розв'язання. Спочатку визначимо, в якому порядку ростуть квіти. Вже відомо, що жовта лілія росте у правому горщику. Оскільки у центрі немає нічого червоного, червона герань може рости тільки у лівому горщику. Таким чином, у центрі росте синя незабудка. З'ясуємо, як розфарбовані горщики. Червоний горщик не може знаходитися у центрі (там немає нічого червоного) і ліворуч (там росте червона герань), отже червоний горщик знаходиться праворуч, у ньому росте жовта лілія. Синій горщик не може знаходитися у центрі (там росте синя незабудка) і праворуч (там уже стоїть червоний горщик), отже синій горщик знаходиться ліворуч, у ньому росте червона герань. Жовтий горщик, що залишився, знаходиться у центрі, у ньому росте синя незабудка.





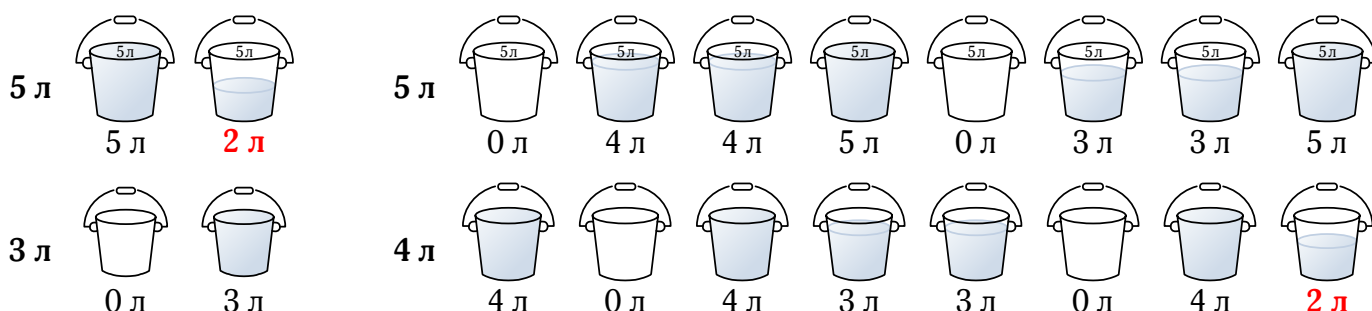
1. Запишіть кілька разів поспіль число 2021 так, щоб отримане число ділилося націло на 21.

Відповідь: наприклад, 202120212021.

2. У Сашка було два порожніх відра. На одному було нанесено маркування «5 л», а про друге Сашко пам'ятав, що воно вміщує або рівно 3 л, або рівно 4 л води. Допоможіть Сашку, який приїхав на річку, визначити, скільки води вміщує друге відро. Також для кожного з випадків (5 л і 4 л або 5 л і 3 л) покажіть, як набрати рівно 2 л води.

Розв'язання. $3 \times 3 \text{ л} = 9 \text{ л} < 10 \text{ л} = 2 \times 5 \text{ л}$; $3 \times 4 \text{ л} = 12 \text{ л} > 10 \text{ л}$. Тому Сашко може вилити вміст 3 відер без маркування у 5-літрове відро, один раз його спорожнивши. Якщо цих трьох відер не вистачить на друге наповнення 5-літрового відра, то у Сашка 3-літрове відро, а якщо буде надлишок — 4-літрове.

Способи набрати рівно 2 л води показані на рисунку.



3. В ігровому магазині міняють 10 дисків з PC-іграми на 3 диски з іграми для PlayStation або один диск для PlayStation на три диски з PC-іграми та 50 грн. Скільки коштує диск з грою для PlayStation?

Відповідь: 500 грн.

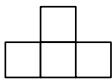
Розв'язання. 30 дисків для PC = 9 дисків для PlayStation; 9 дисків для PlayStation = 27 дисків для PC та 450 грн. Тому 30 дисків для PC = 27 дисків для PC та 450 грн. Тобто 3 диски для PC = 450 грн; 1 диск для PC = 150 грн; 3 диски для PlayStation = 10 дисків для PC = 1500 грн; 1 диск для PlayStation = 500 грн.

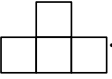
4. Після того, як Олексій вибрав та з'їв третину всіх полуниць з бабусиною варення, рівень варення в банці знизився на чверть. Яку частину варення тепер складають полуниці?

Відповідь: $2/3$.

Розв'язання. Третина полуниць займає чверть банки, тому $2/3$ полуниць займають півбанки. Півбанки становить $2/4$ рівня. Отже, залишок полуниць займає $2/4$ рівня з $3/4$, тобто дві частини з трьох або $2/3$ варення, що залишилося.

5. У Алінки й Андрійка були дві рівні фігури, що складались не більше ніж із 21 клітинки. Алінка роз-

різала свою фігуру на куточки , а Андрійко — на фігурки , причому зайвих клітинок у кожного з них не залишилось. Наведіть приклад фігури, яка могла бути в Алінки й Андрійка.

Розв'язання. Фігури можуть мати лише 12 клітинок (це єдине число не більше за 21, яке ділиться націло на 3 і на 4), тому Алінка отримала 4 фігурки , а Андрійко — 3 фігурки . Приклад вигляду фігури і способів її розрізань наведено на рисунку.





1. Розставте в клітинках квадратної таблиці розміром 4×4 десять знаків «—» так, щоб у кожному стовпчику була парна кількість знаків «—», а в кожному рядку була непарна кількість знаків «—».

Відповідь: один з можливих варіантів розстановки знаків указаний на рисунку.

—	—	—	
—	—		—
—		—	—
—			

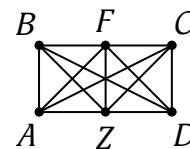
2. Шестицифрове число ділиться на 8. Яку найбільшу суму цифр воно може мати?

Відповідь: 51.

Розв'язання. Оскільки $1000 : 8$, то будь-яке шестицифрове число, що закінчується трьома нулями, ділиться націло на 8. Серед усіх чисел, які закінчуються трьома нулями, найбільшу суму цифр має число 999 000. Знайдемо трицифрове число з якомога більшою сумою цифр, яке ділиться націло на 8. Очевидно, що націло ділиться на 8 число 888, сума його цифр дорівнює 24. Спробуємо отримати більшу суму цифр. Остання цифра має бути парною. Якщо остання цифра не більша за 6, то сума цифр не перевищуватиме $9 + 9 + 6 = 24$. Отже, залишаємо останньою цифрою 8. Якщо передостання цифра 9, то число, що закінчується на 98, не ділитиметься навіть на 4. Якщо передостання цифра не більша за 7, то сума цифр не перевищуватиме $9 + 7 + 8 = 24$. Отже, залишаємо передостанньою цифрою 8. Збільшити третю з кінця цифру до 9 не можна, оскільки 988 не ділиться націло на 8. Таким чином, шестицифрове число з найбільшою сумою цифр, яке ділиться на 8, — це 999 888, сума його цифр дорівнює $9 + 9 + 9 + 24 = 51$.

3. У прямокутнику розміром 1×2 відмічено 6 точок — чотири вершини та дві середини більших сторін. Скільки існує різних прямокутних трикутників з вершинами в цих точках?

Відповідь: 14 — ABF , ABC , BCD , FCD , CDZ , CDA , DAB , ZAB , BFZ , CFZ , AZF , DFZ , AFD , BZC (див. рис.).



4. 100 сумних мавпочок кидають одна в одну одним кокосовим горіхом. Сумна мавпочка, яка попала в іншу сумну мавпочку, стає веселою і більше вже не стає сумною. Мавпочка, в яку попали, вибуває з гри. Яких мавпочок більше вибуло з гри — веселих чи сумних — у момент, коли в грі залишилась одна мавпочка?

Відповідь: сумних мавпочок вибуло більше.

Розв'язання. Кожна весела мавпочка, що вибула, стала веселою тому, що вибила з гри деяку сумну мавпочку. Тому сумних мавпочок, які вибули з гри, не менше, ніж веселих мавпочок узагалі, а отже не менше, ніж веселих мавпочок, які вибули з гри. Оскільки вибула непарна кількість мавпочок, то серед тих, які вибули, однакової кількості веселих і сумних бути не може.

5. Яка найменша кількість шахових коней потрібна, щоб побити всі поля шахової дошки розміром 8×8 (вважається, що поле під собою кінь теж б'є)?

Відповідь: 12.

Розв'язання. Зафарбуємо на дошці 12 полів так, як показано на рисунку а. Жодні дві з них не можуть бути побиті одним і тим самим конем. Отже, щоб побити всі поля, потрібно щонайменше 12 коней. На рисунку б показано, як розставити 12 коней, щоб побити всі поля дошки.

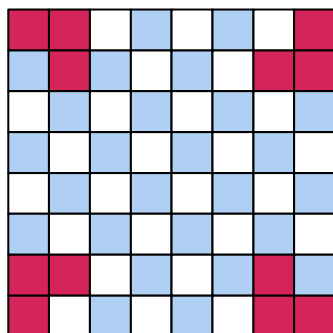


Рис. а

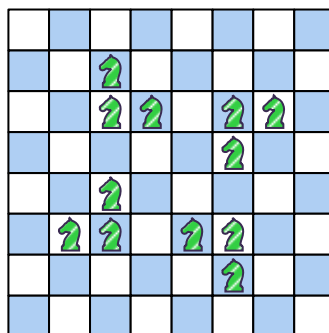
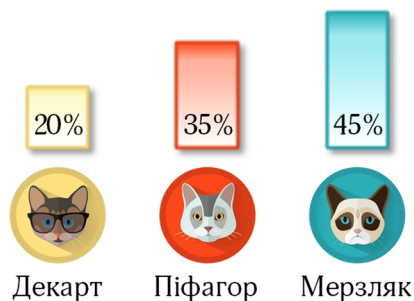


Рис. б



1. В одній зі спільнот деякої соціальної мережі йшло голосування за найсимпатичніше кошеня. До ранку голоси розподілилися так, як показано на рисунку. До вечора голосів додалося, але всі нові голоси були за Мерзляка. У підсумку в Декарта залишилося тільки 16 % голосів. Скільки відсотків голосів стало ввечері у Піфагора?



Відповідь: 28 %.

Розв'язання. Оскільки ніхто більше не проголосував за Декарта, голоси, які він отримав, складають 16 % нової кількості тих, хто голосував. Тобто кількість голосів увечері складає $\frac{20}{16} \cdot 100\% = 125\%$ тих, хто проголосував до ранку. Оскільки за Піфагора також ніхто більше не проголосував, відсоток голосів, поданих за нього дорівнює $\frac{35}{125} \cdot 100\% = 28\%$.

2. Відомо, що $ЖЖ + Ж = МЕД$. Якою цифрою закінчується добуток $В \cdot І \cdot Н \cdot Н \cdot І \cdot П \cdot У \cdot Х$ (різними буквами позначені різні цифри, а однаковими — однакові)?

Відповідь: 0.

Розв'язання. Так як до двоцифрового числа $ЖЖ$ додали одноцифрове число $Ж$ і отримали трицифрове число, то $Ж = 9$, а $МЕД = 108$. Уже використані 4 цифри. У добутку $В \cdot І \cdot Н \cdot Н \cdot І \cdot П \cdot У \cdot Х$ використані 6 інших цифр. Таким чином, серед них обов'язково є цифри 2 і 5, отже, цей добуток закінчується нулем.

3. У деякому класі при будь-якій роздачі 200 цукерок знайдуться принаймні двоє школярів, які отримали однакову кількість цукерок (можливо, і жодної). Яка найменша кількість учнів може бути у такому класі?

Відповідь: 21.

Розв'язання. Нехай у класі не більше 20 осіб, тоді нічого не дамо першому учню, дамо 1 цукерку другому учню, 2 цукерки — третьому, і т. д. У цьому випадку буде роздано $0 + 1 + 2 + \dots + 19 = 190$ цукерок. Решту цукерок віддамо учню, в якого найбільше цукерок. Тим самим указаний спосіб роздати цукерки так, щоб не знайшлося двох учнів з однаковою кількістю цукерок. Отже, в класі має бути більше ніж 20 учнів. Якщо в класі 21 учень, то найменша кількість цукерок, необхідна для того, щоб усі учні отримали різну їх кількість, так само $0 + 1 + 2 + \dots + 20 = 210$. Так як роздається 200 цукерок, то в цьому випадку умова виконується.

4. Прямокутник розділений двома вертикальними і двома горизонтальними відрізками на дев'ять прямокутних частин. Площі деяких із частин указані на рисунку. Знайдіть площу виділеної частини.

Відповідь: 40.

Розв'язання. Неважко зрозуміти, що коли прямокутник розрізаний вертикальним і горизонтальним відрізками на чотири частини, то добутки площ протилежних по діагоналі частин рівні. Використовуючи це міркування, послідовно знаходимо площі верхньої середньої частини ($30 \cdot 35 \div 21 = 50$), правої середньої частини ($8 \cdot 35 : 10 = 28$) і, нарешті, верхньої правої частини ($50 \cdot 28 : 35 = 40$).

30		
21	35	
	10	8

5. Про трикутник, один з кутів якого дорівнює 120° , відомо, що його можна розрізати на два рівнобедрених трикутники. Якими можуть бути величини двох інших кутів початкового трикутника?

Відповідь: 40° і 20° або 45° і 15° .

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC $\angle B = 120^\circ$. Розріз, указаний в умові задачі, має проходити через вершину трикутника (інакше при розрізанні не вийде два трикутники). При цьому він може проходити як через вершину B , так і через іншу вершину.

У першому випадку (BD — лінія розрізу) принаймні один з утворених трикутників, наприклад, трикутник BDC , не буде гострокутним, тому BC — його основа. Тоді $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$, $\angle BDA = 2\alpha$ — зовнішній для трикутника BDC . При цьому у трикутника ABD сторона AB основою бути не може (інакше з рівності $DA = DB = DC$ буде випливати, що $\angle B = 90^\circ$ — це суперечить умові). Тобто його основою є або AD , або BD .

Якщо AD основа, то $AB = DB$ (рис. а). Тоді $\angle A = \angle BDA = 2\alpha$. З трикутника ABC отримуємо $2\alpha + \alpha = 60^\circ$, $\alpha = 20^\circ$. Отже, $\angle C = 20^\circ$, $\angle A = 40^\circ$.

Якщо BD основа, то $AB = AD$ (рис. б). Тоді $\angle ABD = \angle BDA = 2\alpha$. Тобто $\angle B = 3\alpha$, $\alpha = 40^\circ$, отже $\angle C = 40^\circ$.

У другому випадку лінія розрізу має пройти через вершину більшого з двох гострих кутів (AE — лінія розрізу, див. рис. в). Тоді обидва утворені трикутники будуть тупокутними. При цьому $AB = BE$ і $AE = EC$. Отже, $\angle BAE = \angle BEA = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 30^\circ$, а $\angle EAC = \angle ECA = \frac{1}{2} \angle BEA = 15^\circ$.

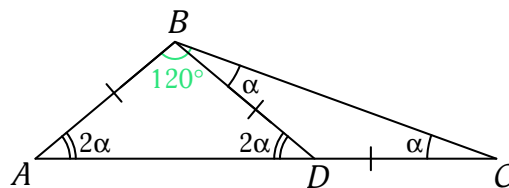


Рис. а

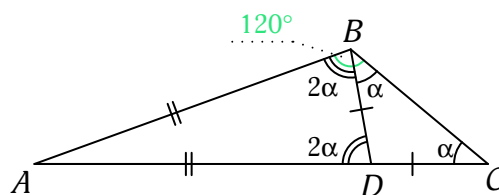


Рис. б

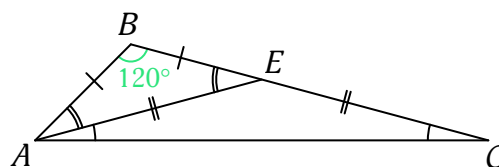


Рис. в